

Informatique fondamentale

LIV 2024-2025
Travaux dirigés 3

Site du cours : <https://jj.up8.site/Info-Fond.html>

Les exercices marqués de (@) sont à faire dans un second temps.

Exercice 1. *En compréhension*

Énumérer, si possible, les éléments des ensembles suivants. (ici $<$ et \leq sont les inégalités sur \mathbb{R}) (pour un ensemble décrit par des propositions on peut utiliser $\{x : \dots\}$ ou $\{x / \dots\}$)

1. $\{x / (x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 16) \wedge (3 \leq x) \wedge (x \text{ est pair})\}$
2. $\{y / (y \in \mathbb{N}) \wedge (y < 16) \wedge \neg(3 \leq y)\}$
3. $\{\alpha / (\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (\alpha < 16) \wedge \neg(3 \leq \alpha)\}$
4. $\{x : (x \in \mathbb{Z}) \wedge \neg(x < 16) \wedge \neg(3 \leq x)\}$

Exercice 2. *Égalité*

Les ensembles suivants sont-ils égaux ? (les opérations sont considérées dans \mathbb{R})

- $A = \{x : (x \in \mathbb{R}) \wedge x^2 - 5x + 6 = 0\}$
- $\{2, 3\}$
- $\{3, 6\}$
- $\{3\}$

(Indice) L'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ a au plus deux solutions.

Exercice 3. *Égalité 2*

Expliquez pourquoi : $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 1\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| = 1\}$.

Indice : $|\cdot|$ représente la valeur absolue d'un nombre réel. Exemple : $|-6| = 6$ $|6| = 6$

Exercice 4. *Dans un treillis*

On pose \mathcal{U} l'ensemble de tous les nombres entiers positifs $x \leq 20$, et on pose

- $A = \{x \in \mathcal{U} : x \text{ is a prime number}\}$,
- $B = \{x \in \mathcal{U} : x \text{ is odd number}\}$.

trouver les ensembles $(A \cup B)^c$ et $A^c \cap B^c$.

Exercice 5. *Nouvelle opération ?*

Pour deux ensembles A et B on définit l'opération \triangleright de la façon suivante $A \triangleright B := \left\{x : \neg \left((x \in A) \Rightarrow (x \in B) \right)\right\}$

On pose $A = \{1, 2, 4, 5, 9\}$ et $B = \{2, 3, 5, 7\}$.

1. Énumérer les éléments de $A \triangleright B$
2. Énumérer les éléments de $B \triangleright A$
3. Sous quel autre nom est connue l'opération \triangleright ?

Exercice 6. *Ensemble bizarre*

Énumérer, si possible, les éléments des ensembles suivants. (ici $<$ et \leq sont les inégalités sur \mathbb{R}) (pour un ensemble décrit par des propositions on peut utiliser $\{x : \dots\}$ ou $\{x / \dots\}$)

1. $\{5 : (5 \in \mathbb{N}) \wedge \neg(5 \in \mathbb{N})\}$ (ici le symbole 5 joue le rôle de la variable)
2. $\{x / (x \in \mathbb{N}) \vee \neg(x \in \mathbb{N})\}$
3. $\{x / (x \text{ est une lettre de l'alphabet latin}) \vee ((x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq 10))\}$
4. $\{x : ((x \text{ est une lettre de l'alphabet latin}) \vee (x \in \mathbb{N})) \wedge (x \leq 10)\}$
5. $\{x / (x \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x \in \mathbb{Z})\}$
6. Soit x un nombre entier, $\{y : (y \in \mathbb{N}) \wedge (y \leq x)\}$

Exercice 7. Démonstration

Pour deux ensembles G et H , on dit que $G = H$ si $G \subset H$ et $H \subset G$. Soit E un ensemble et soient A, B et C trois sous-ensembles de E . Montrer, en utilisant les lois propositionnelles, que

1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$,

2. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,

3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.