Informatique fondamentale

LIV 2024-2025

Travaux dirigés 4

Site du cours : https://jj.up8.site/Info-Fond.html
Les exercices marqués de (@) sont à faire dans un second temps.

Rappels/Remarques

- Si $n \in \mathbb{N}$ alors $[n] := \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
- $a \leqslant b \leqslant c$ est la contraction de $(a \leqslant b) \wedge (b \leqslant c)$.
- $(\forall x \in A, P)$ est la contraction de $\forall x, (x \in A) \Rightarrow P$.
- $(\exists x \in A, P)$ est la contraction de $\exists x, (x \in A) \wedge P$
- $\forall x \in A, \forall x \in B, P$ est la contraction de $\forall x \in A, (\forall x \in B, P)$. (qui est équivalent à $\forall x, \forall y, (x \in A) \Rightarrow ((x \in B) \Rightarrow (x \in B)))$.
- De manière générale, si Q est un symbole quantificateur (donc $\forall$ ou $\exists$), alors $(\mathrm{Q}x, \mathrm{Q}x, P)$ signifie $\mathrm{Q}x, (\mathrm{Q}x, P)$.
- Si $a, b \in \mathbb{R}$ $[a, b] = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$.
- Si $a, b \in \mathbb{R}$ $x \in]a, b] := a < x \leqslant b$.

Exercice 1. *Inclusion*

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

1. $[3, 5] \subset [1, 6]$
2. $]3, 5[\subset [3, 5]$
3. $[3, 5] \subset]3, 5[$
4. $[-3, 5[\subset [0, 1]$
5. $]-\infty, 5[\subset]-\infty, 5]$
6. $]-6, 2] \subset]-3, +\infty[$

Exercice 2. *Intersection, Union*

Donner, si possible sous forme d'intervalle, les résultats des opérations suivantes.

- $[2, 6] \cap [3, 7]$
- $[0, 6] \cap]0, +\infty[$
- $]-\infty, -1] \cap]3, +\infty[$
- $]-\infty, -1] \cup]3, +\infty[$
- $]-\infty, 3] \cup]-1, +\infty[$

Exercice 3. *Produit*

On considère les ensembles suivants :

- $A = \{a, b\}$
- $B = \{\square, \odot\}$
- $C = [3]$

Énumérer les éléments des ensembles suivants :

1. $C \times B$
2. $B \times B$ (ou B^2)
3. $A \times C \times A$

Exercice 4. *Couple enumerate*

Énumérer les éléments des ensembles suivants. ($+$ et $<$ sont respectivement l'addition et la relation d'infériorité dans $\mathbb{R}$)

1. $A := \{(x, y) : (x + 3 = y) \wedge (x \in \mathbb{Z}) \wedge (x > -5) \wedge (x < 4)\}$
2. $B := \{(m, u) : (m + 3 < u) \wedge (m \in \mathbb{Z}) \wedge (m > -5) \wedge (m < 4) \wedge (u < m + 9)\}$
3. $C := \{(x, 9) : (x + 3 < 9) \wedge (x \in \mathbb{Z}) \wedge (x > -5) \wedge (x < 4) \wedge (9 < x + 9)\}$

Exercice 5. *Est-ce vrai ? (modifié)*

$A := \{1, 4, 7, 8, 9\}$ $B := \{8, 9, 10\}$
- A-t-on $\forall x \in A, x < 10$?
- A-t-on $\forall x \in A, \forall y \in B, x < y$?

— Enumérer les éléments de l'ensemble $\{y : (y \in A) \wedge (\forall x \in B, y < x)\}$.
— A-t-on $\forall x \in A, \exists y \in B, y < x$?
— A-t-on $\forall x \in A, \exists y \in B, x < y$?
— A-t-on $\exists y \in B, \forall x \in A, x < y$?

Exercice 6. *Théorème en formule*

Voici une liste de propositions ou définitions, transformez-les en formule.
— L'ensemble $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$.
— Tout nombre entier différent de -1 et 1 est divisible par un nombre premier (on peut noter P l'ensemble des nombres premiers).
— 0 est plus petit que n'importe quel nombre entier.

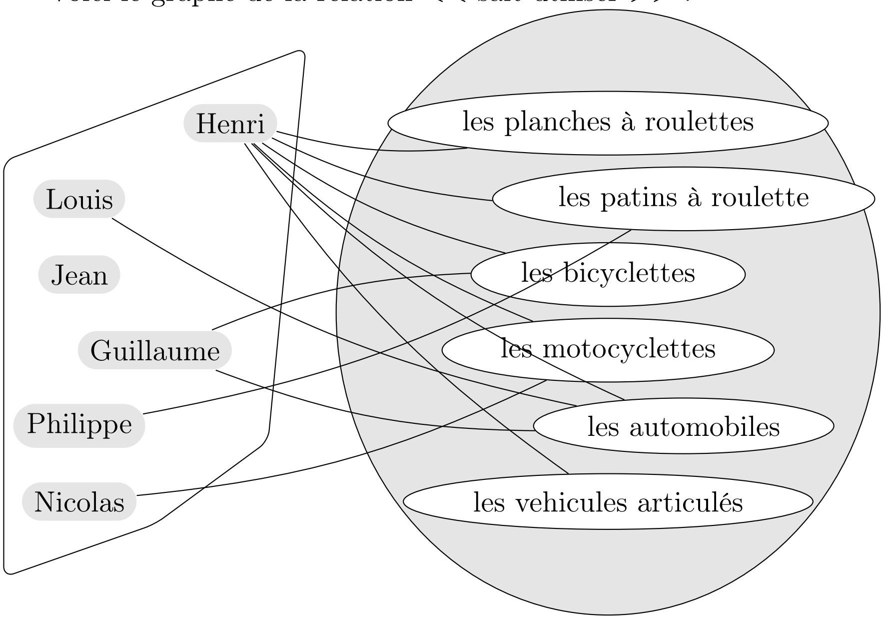
Exercice 7. *Quantificateur*

Considérons l'expression : $x^2 > 9$.

1. Peut-on dire, sans autre renseignement, que c'est une proposition ? Si oui est-elle vraie ou fausse ?
2. Maintenant l'expression $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 9$. Est-ce une proposition. Est-elle vraie ou fausse ?
3. Mêmes questions pour $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 9$

Exercice 8. *Transports*

Voici le graphe de la relation << sait utiliser >> :



Répondez aux questions suivantes :

1. Nicolas sait-il faire de la moto ?
2. Philippe sait-il conduire un véhicule articulé ?
3. Guillaume sait-il conduire une automobile ?
4. Quel est l'ensemble des véhicules que Guillaume sait utiliser ?
5. Quels sont les gens qui savent conduire une automobile ?
6. Quels sont les gens qui savent utiliser les bicyclettes et les automobiles ?
7. Quels sont les gens qui savent tout utiliser ?
8. Quels sont les véhicules que sait utiliser Jean ?

Exercice 9. *Transports 2*

Pour chaque proposition suivante, dans le contexte de l'exercice *Transports*, indiquez si elle est vraie ou fausse.

1. Il existe quelqu'un qui sait tout utiliser.
2. Il existe un vehicule qui peut être utilisé par tout le monde.
3. Tous les véhicules peuvent être utilisés par quelqu'un.
4. Tous les véhicules peuvent être utilisés par tout le monde.
5. Quelqu'un ne peut utiliser aucun véhicule.
6. Il y a un véhicule qui ne peut être utilisé par personne.

Exercice 10. *En symbole*

Si on pose :

- g : Guillaume
- p : Philippe
- j : Jean
- l : Louis
- h : Henri
- n : Nicolas

- b : les bicyclettes
- o : les patins à roulettes
- m : les motocyclettes
- v : les automobiles
- a : les véhicules articulés
- r : les planches à roulettes

- R : << sait utiliser >>.
- A : l'ensemble d'arrivé de la relation R
- D : l'ensemble de départ de la relation R

Écrire les phrases des deux exercices précédents sous la forme d'ensembles ou de propositions.

Exercice 11. *Questions*

En utilisant les codes de l'exercice *En symbole*. Répondre aux questions suivantes :

1. Quel est l'ensemble d'arrivé A de la relation << sait utiliser >> ?
2. Quel est l'ensemble de départ D de la relation << sait utiliser >> ?
3. Quel est l'ensemble de la relation << sait utiliser >> ?
4. Quel est le cardinal de la relation << ne sait pas utiliser >>, sous-ensemble de $D \times A$?

Exercice 12. *Proposition*

Indiquer si ces propositions sont vraies ou fausses. (Attention $[0,3]$ et $[0,3[$ sont deux intervalles différents)

1. $\forall x \in [0,3],\ \exists y \in \mathbb{R},\ x < y$
2. $\forall y \in [0,3],\ \exists x \in \mathbb{R},\ y < x$
3. $\forall x \in [0,3],\ \exists y \in [0,3],\ x < y$
4. $\forall x \in [0,3[,\ \exists y \in [0,3],\ x < y$
5. $\exists x \in [0,3[,\ \exists y \in [0,3],\ x < y$
6. $\forall x \in [0,3[,\ \exists y \in [0,3[,\ x < y$
7. $\exists x \in [0,3[,\ \forall y \in [0,3[,\ x < y$
8. $\exists x \in [0,3],\ \forall y \in [0,3[,\ x < y$

Exercice 13. *En français s'il vous plaît !*

Soient A et B des ensembles et on pose H : l'ensemble des humains, R : la relation <<est la mère de>>, T : la relation <<est l'enfant de>>. Que signifie chacune des expressions ou que décrit chaque ensemble suivants :

1. $\forall x \in H, \exists t, tRx$
2. $\forall x \in A,\ x \in B$
3. $\{x : (x \in H) \wedge (\forall y, \neg(yTx))\}$
4. $\forall x, y\, (xRy) \Rightarrow (yTx)$

Exercice 14. *Le contraire*

Pour chacune des propositions suivantes indiquer son contraire ou s'il s'agit d'un ensemble son complémentaire.

1. L'ensemble des nombres divisibles par 7.
2. $\forall a \in A,\ \exists b \in \mathbb{R},\ x < b$
3. $\{A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) /\ \exists x \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ a < x\}$
4. $A \subset B$

Exercice 15. *Les impairs*

Représentez l'ensemble des nombres impairs.

Bonus : essayez d'écrire un programme en python qui crée cet ensemble.

Exercice 16. *Miroir*

Si $X \times Y = Y \times X$, que pouvons-nous dire des ensembles X et Y ?

Informatique fondamentale

LIV 2024-2025
Travaux dirigés 5

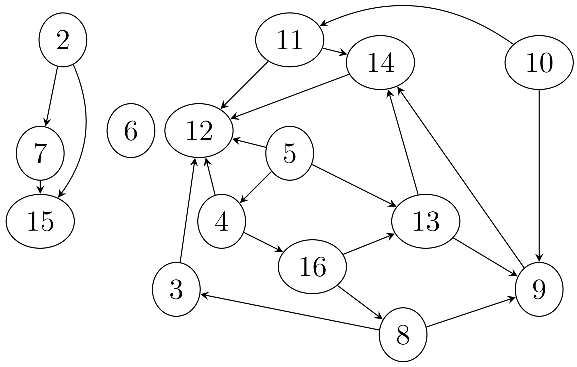
Site du cours : https://jj.up8.site/Info-Fond.html
Les exercices marqués de (@) sont à faire dans un second temps.

Un **chemin** est une suite de sommets parcourus en empruntant les arcs (les flèches). Un chemin contient au moins 1 sommet (dans ce cas le chemin n'emprunte aucun arc) et peut comporter plusieurs fois le même sommet à différentes étapes du parcours.

Un **circuit** est un chemin qui part et revient à un même sommet en empruntant au moins un arc. Certains graphes n'admettent pas de circuit.

Exercice 1. *Graphe à relation*

Soit le graphe suivant :



1. Ce graphe est-il sans circuit ?
2. Quel est l'ensemble de ses sommets S ?
3. Énumérer les couples de la relation associée au graphe.
4. On pose T l'ensemble T : $\{(x, y) : x, y \in S \wedge$ il existe un chemin allant de x à y $\}$
   (a) La relation interne (S, T) est-elle une relation d'ordre stricte ? d'ordre large ? Et si oui est-elle totale ? non totale ?
   (b) Si (S, T) est une relation d'ordre quels sont les éléments maximaux, minimums, minimaux, maximums sur S ? Si (S, T) n'est pas une relation d'ordre, pourquoi ?
5. On pose $A := \{5, 13, 14, 12\}$ sous-ensemble de S, T restreint à A est-elle une relation d'ordre sur A ?
6. Y a t-il des éléments minimums, maximums, minimaux, maximaux, sur A ?
7. L'ensemble A admet-il des majorants, minorants ? Si oui quels sont-ils ?

Exercice 2. *De relation à graphe*

On pose $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 14\}$ et on définit R un ensemble de couple de E.
$R := \{(3, 2), (4, 2), (4, 6), (5, 2), (5, 4), (5, 7), (6, 8), (6, 7), (7, 9), (8, 9), (9, 14), (11, 5), (8, 3), (11, 2), (11, 14), (2, 11)\}$

1. Le graphe de la relation (E, R) est-il sans circuit ?
2. On définit $T := \{(x, y) : (x, y) \in E^2 :$ il existe un chemin allant de x à y dans le graphe de la relation $R\}$. Est-ce une relation d'ordre ? Argumenter.